Dagli articoli rivisti, corretti e riassunti apparsi in
BOLLETTINO del GRUPPO ASTROFILI DI PADOVA
n. 19 - feb. 2002; n. 28 - nov. 2004; n. 30 - giu. 2005

L'ORDINE TENDENZIALE DEI SISTEMI PLANETARI

I DUE PRINCIPI DI STABILITÀ

di Carlo Frison

Keplero aspirava inizialmente al sacerdozio e non abbandonò mai l'interesse per la teologia. Nella sua attività di astronomo si poneva domande su quali disegni avesse Dio nel creare l'universo. Affrontando il problema della relazione tra le distanza dei pianeti, la sua ricerca era guidata dall'idea della perfezione geometrica quale espressione del disegno divino. Fu colpito così dal fatto che esistessero cinque e soltanto cinque poliedri regolari, i quali, se venivano iscritti in una serie di sfere, permettevano di stabilire tra i raggi delle sfere relazioni geometriche simili ai rapporti delle distanze dei sei pianeti dal sole. La necessità di cinque solidi regolari per separare le sei sfere del moto dei pianeti era una coincidenza davvero degna di un disegno divino (fig. 1).

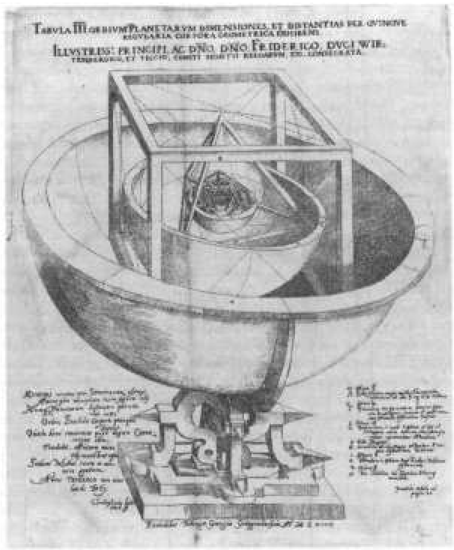

Fig. 1 - *Dal* Mysterium cosmographicum (1596) *di Keplero. Illustrazione di un modello della collocazione dei cinque poliedri regolari fra le sfere dei pianeti.*

Da molto tempo abbiamo imparato a lasciare ai filosofi la meditazione sul rapporto tra la perfezione dei disegni divini e le asperità delle teorie scientifiche. L'idea di perfezione geometrica del cosmo è stata sostituita dalle leggi e dai principi della fisica, da cui ottenere teorie sulla formazione del sistema solare a partire dal caos di una nebulosa primordiale di gas. Dapprima l'antiquato modello di Keplero è stato sostituito dalla semplicissima legge fenomenologica di Titius-Bode, e poi anche questa è stata resa obsoleta dai progressi dell'informatica, che può simulare al calcolatore la formazione dei pianeti per accrescimento, collisioni e migrazioni. Tuttavia, non ha perso interesse la descrizione dell'aspetto assunto dai sistemi orbitanti al raggiungimento della fase di stabilizzazione, che è una situazione necessaria al sorgere della vita intelligente.

IL PRIMO PRINCIPIO DI STABILITÀ
Il difetto della legge di Titius-Bode è la mancanza di criteri univoci per generalizzarla a tutti i sistemi orbitanti. Per questo motivo propongo di sostituirla con una relazione contente il campo gravitazionale generato dal corpo centrale. La relazione è ricavata empiricamente da un diagramma avente in ordinata il logaritmo del campo gravitazionale centrale alla distanza dei corpi orbitanti, e in ascissa il numero ordinale degli orbitanti. La necessità, comune a tutte le leggi del tipo di Titius-Bode, di introdurre orbite prive del pianeta, viene sopperita con un criterio identico per tutti i sistemi orbitanti, e cioè che le orbite vuote introdotte portino i punti a disporsi in una fascia ristretta di inclinazione negativa di 45°. In questo modo i punti del diagramma si approssimano a una curva polinomiale di addizione di una retta di coefficiente -1 e di una sinusoide. La figura 2 mostra la sinusoide inclinata per il sistema solare, attraversata dall'asse di simmetria di inclinazione circa -1. Vi compare anche Plutone, benché la sua massa sia insufficiente per considerarlo un pianeta. Diagrammi simili si ottengono per i satelliti di Giove, Saturno e Urano, introducendo opportune orbite vuote. La generalizzazione della formula, che lega la distanza degli orbitanti non solo al loro numero ordinale ma anche alla massa del corpo centrale, ne accredita un significato fisico [1].

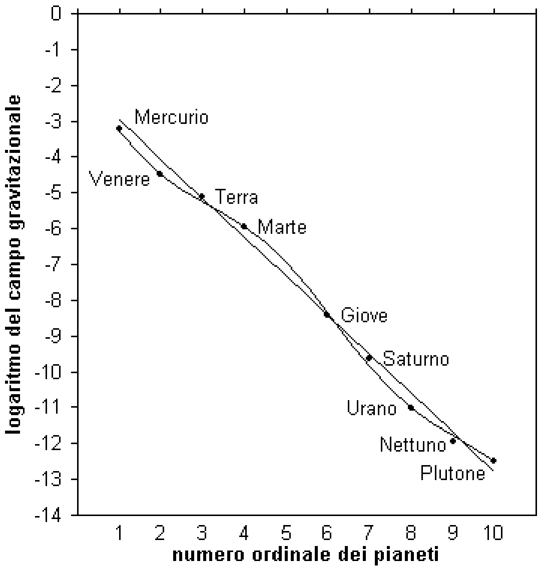

Fig. 2 - *Relazione tra il numero ordinale dei pianeti e il campo gravitazionale solare alla rispettiva distanza.*

Dai parametri usati per costruire il diagramma, la massa e la distanza, e dal numero ordinale, è deducibile il seguente primo principio, estensibile alle leggi del tipo di Titius-Bode.

Principio della distanza dei corpi orbitanti. *L'aumento delle distanze dei corpi di un sistema orbitante dipende dalla massa del corpo centrale e dal numero ordinale del corpo preso come esponente.*

LE COMMENSURABILITÀ TRA I PIANETI

Il primo principio non considera che la stabilizzazione è guidata dalle interazioni tra le masse degli orbitanti. Ricorrere alla sola risonanza non è semplice né possibile in tutti i casi, soprattutto tra i periodi dei pianeti. La risonanza è rilevante tra coppie di corpi di masse molto differenti. Le cose diventano gravemente problematiche per le triadi e ancor più per le tetradi di masse comparabili. La commensurabilità tra due periodi dovrebbe essere pari a un rapporto tra numeri piccoli, cioè le interazioni, per causare la stabilità, dovrebbero ripetersi uguali entro un intervallo di tempo relativamente breve. Per questo motivo il rapporto di 13:8 di quasi-commensurabilità tra i periodi di Venere (T_v) e della Terra (T_t) esprimerebbe la ripetizione di cinque volte del periodo sinodico (T_{sin}) senza avere il significato di risonanza stabilizzante:

T_{sin} = 583,92 giorni (sinodico Venere-Terra)
5 T_{sin} = 2919,5 "
13 T_v = 2921,1 " (Venere)
8 T_t = 2922,08 " (Terra)

Qui non abbiamo due corpi di masse molto differenti tra loro, ma due pianeti dello stesso ordine di grandezza. La comprensione delle interazioni incontra altre difficoltà nel fatto che neanche i due pianeti meno massicci, Marte e Mercurio, hanno periodi in rapporto di commensurabilità di risonanza con la Terra o Venere. Tuttavia, non pare esserci un motivo teorico per escludere che i periodismi lunghi favoriscano la stabilizzazione, soprattutto quando l'approssimazione verso un preciso minimo comune multiplo è così elevata da far sospettare un significato fisico. Questo è il caso dei pianeti rocciosi combinati in due triadi. La prima triade, formata da Mercurio, Venere e la Terra, ha le differenze solamente sulla quarta cifra. La coordinazione di Mercurio si verifica con 25 ripetizioni del periodo sinodico Terra-Venere, pari a 14598 giorni.

25 T_{sin} = 14598 giorni
166 T_{me} = 14602,8 " (Mercurio)
65 T_v = 14605,5 " (Venere)
40 T_t = 14610,3 " (Terra)

E approssimazione altrettanto buona si verifica anche per la seconda triade, formata da Venere, Terra e Marte. La coordinazione di Marte si verifica con 20 ripetizioni del periodo sinodico Terra-Venere, pari a 11678,4 giorni.

20 T_{sin} = 11678,4 giorni
52 T_v = 11684,4 " (Venere)
32 T_t = 11688,2 " (Terra)
17 T_{ma} = 11678,6 " (Marte)

Invece, per i pianeti giganti l'approssimazione delle commensurabilità tra i periodi dei due maggiori, Giove (T_g) e Saturno (T_s), è effettivamente scarsa.

T_{sin} = 19,859 anni (sinodico Giove-Saturno)
5 T_g = 59,31 " (Giove)
2 T_s = 58,914 " (Saturno)

È interessante notare però che qui la ricerca della miglior approssimazione del minimo comune multiplo, a differenza dei pianeti rocciosi, dà come risultato la tetrade e non qualche triade. La coordinazione degli altri due pianeti relativamente minori, Urano e Nettuno, avviene insieme con la ripetizione di 50 volte del periodo sinodico Giove-Saturno.

50 T_{sin}	=	992,4	anni	
84 T_g	=	996,4	"	(Giove)
34 T_s	=	1001,5	"	(Saturno)
12 T_u	=	1008,2	"	(Urano)
6 T_n	=	988,6	"	(Nettuno)

Il fenomeno da discutere è quindi la coordinazione di corpi relativamente meno massicci, ma non minimi, al periodo sinodico della coppia di corpi maggiori. Dato che non conosciamo pentadi dei corpi di masse comparabili, è ipotizzabile che le loro interazioni sarebbero così complesse da impedire anche i lunghi periodismi. Se così fosse, dovrebbe rivelarsi un effetto prodotto dalle interazioni multiple. Lo studio del problema mi ha indotto a una semplificazione massima che eviti la preclusione frapposta dalla difficoltà dei procedimenti matematici. Sono così pervenuto all'introduzione del concetto di oscillazione radiale del centro di massa dei sistemi di corpi orbitanti, come rappresentazione evidente della predominanza del periodo sinodico dei due corpi più massicci nella stabilizzazione dei pianeti.

IL CENTRO DI MASSA DI UN GRUPPO DI CORPI
Il moto del centro di massa di un gruppo di corpi è molto vario, esplicandosi in variazioni di distanza dall'astro centrale e, talvolta, alternando l'avanzamento diretto a brevi retrogradazioni, cioè formando, curiosamente, dei cappi come immaginava il sistema tolemaico. Delle due coordinate polari, la longitudine e la distanza Sole-pianeta, è più semplice trattare la seconda, che inoltre ha il vantaggio di esprimere il potenziale del gruppo di corpi. Il problema diventa così la ricerca di una connessione tra la variazione radiale del moto del centro di massa e la stabilizzazione delle orbite del gruppo di corpi, stabilizzazione che dovrebbe manifestarsi attraverso i periodismi non troppo lunghi rilevabili da diagrammi costruiti ponendo in ascissa il tempo e in ordinata la distanza del centro di massa. La variazione radiale del centro di massa è, in senso lato, una oscillazione complessa e, qualora si ammetta l'invarianza dei parametri, periodica. Per lo scopo della semplice descrizione del fenomeno consideriamo le maggiori approssimazioni possibili e quindi prendiamo la velocità media dei corpi su orbite circolari e complanari, trascurando le perturbazioni prodotte dagli altri corpi al di fuori del gruppo. Le coordinate del centro di massa sono ottenute con il sistema delle equazioni:

$x = \Sigma\, m_i\, x_i / \Sigma\, m_i$
$y = \Sigma\, m_i\, y_i / \Sigma\, m_i$

Dove m_i, x_i e y_i sono rispettivamente le masse e le distanze dei corpi dall'origine degli assi. È sufficiente un semplice programma per calcolatore per produrre i diagrammi, calcolando la distanza del centro di massa agli intervalli di tempo stabiliti. Il procedimento è qui applicato in tre casi: i pianeti rocciosi, quelli giganti e i satelliti medicei.

I DIAGRAMMI DEI PIANETI ROCCIOSI
Dal diagramma dei pianeti rocciosi si dovrebbe rilevare sia il periodismo sinodico tra Venere e la Terra sia il coordinamento con i meno massicci Mercurio e Marte. Per far questo procediamo in due passi. Prima confrontiamo (fig. 3) l'oscillazione del centro di massa della tetrade Mercurio, Venere, Terra e Marte (indicata con linea continua) con quella della coppia Venere e Terra (indicata con linea punteggiata). Quest'ultima è una pseudo-sinusoide di lunghezza d'onda pari al periodo sinodico, in cui la deformazione rispetto a una sinusoide perfetta dipende più dal rapporto tra le masse dei due corpi che dalla loro distanza. Si osserva che l'oscillazione della tetrade, rispetto a quella della coppia, mostra delle alterazioni prodotte da Marte e Mercurio; principalmente la variabilità dell'ampiezza delle onde. Comunque, l'oscillazione della tetrade mantiene un po' di simmetria ottenibile per doppio ribaltamento di un colmo, prima dall'alto al basso e poi da sinistra a destra, in modo da portarlo sopra a una conca. Il secondo passo consiste nell'immaginare le masse di Marte e Mercurio maggiori di quelle reali, per accentuare le alterazioni da loro producibili. Dal confronto con la coppia Venere e Terra, l'oscillazione della triade Venere, Terra e un Marte di massa quadrupla (fig. 4) presenta le seguenti deformazioni: 1° disuguaglianza dell'ampiezza delle oscillazioni; 2° alcune sue conche si sdoppiano, formando in mezzo un massimo locale, così le ondulazioni perdono la quasi simmetria; 3° i colmi e le conche si discostano da quelli del periodo sinodico della coppia Venere-Terra. Nel successivo diagramma (fig. 5) abbiamo il confronto della coppia Venere e Terra con la triade Venere, Terra e un Mercurio di massa quadrupla. L'oscillazione della triade mostra, oltre alla perdita della simmetria, un quarto tipo di alterazione: 4° sono creati molti flessi di forma quasi a gradino. L'ipotesi che si può proporre a questo punto è che l'oscillazione quasi armonica del potenziale è conseguenza della stabilizzazione del gruppo di corpi, dato che le simulazioni con masse accresciute dei corpi piccoli producono una oscillazione più complessa, sia per varietà di ampiezze sia per il disturbo del periodo sinodico dei due corpi maggiori. Per precisare meglio l'ipotesi consideriamo altri casi di sistemi apparentemente stabilizzati.

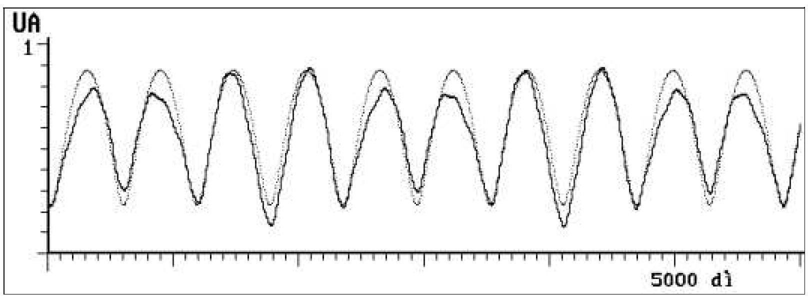

***Fig. 3** - Oscillazione radiale del centro di massa della tetrade Mercurio, Venere, Terra e Marte (linea continua), comparata a quella della coppia Venere e Terra (linea punteggiata). Dal 1-1-1980 al 6-6-1986.*

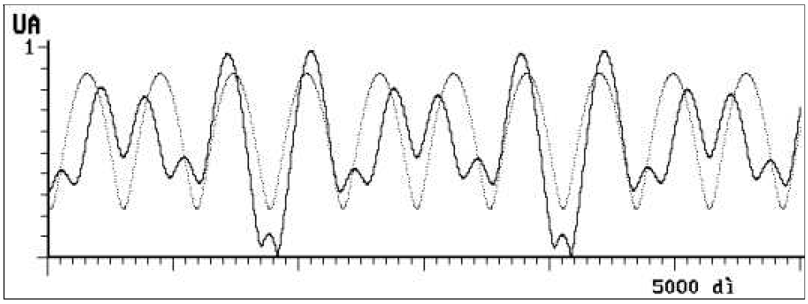

Fig. 4 *- La triade Venere, Terra e un Marte di massa quadrupla forma una oscillazione (linea continua) molto varia in ampiezza e priva della costanza del periodo sinodico della coppia Venere-Terra (linea punteggiata).*

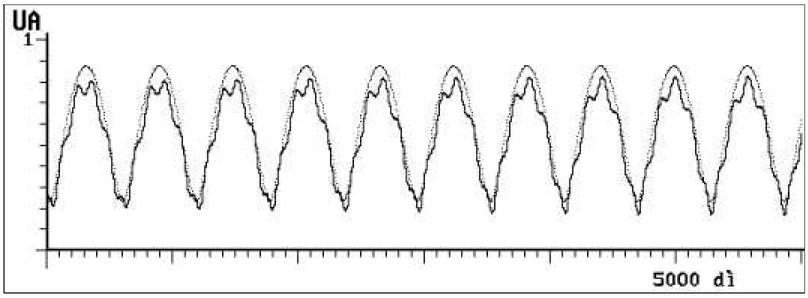

Fig. 5 *- La triade Mercurio di massa quadrupla, Venere e Terra forma una oscillazione (linea continua) alterata da molti flessi. La linea punteggiata è della coppia Venere-Terra.*

I DIAGRAMMI DEI PIANETI GIGANTI

La tetrade esterna non è ben paragonabile a quella interna, in quanto Giove e Saturno hanno masse che differiscono di un ordine di grandezza, mentre la Terra e Venere sono dello stesso ordine di grandezza. Inoltre, la massa di Nettuno è dello stesso ordine di grandezza di Saturno. Questo ha come conseguenza che Saturno non ha una sufficiente influenza per minimizzare le alterazioni prodotte da Nettuno e Urano sull'oscillazione del centro di massa totale. Infatti, si osserva (fig. 6) una grande variazione dell'ampiezza delle oscillazioni, la formazione di qualche massimo locale in alcune conche e la formazione di flessi a gradino, che sono i tipi di deformazione rilevati per i pianeti rocciosi nelle simulazioni con l'aumento delle masse di Marte e Mercurio. Tuttavia, l'oscillazione della tetrade mantiene grossomodo il periodo sinodico della coppia Giove-Saturno. I valori grandi dei coefficienti dei periodi, che non sono presi in considerazione dalla teoria della risonanza, appaiono invece avere efficacia nella rappresentazione dell'oscillazione radiale del centro di massa dei gruppi di pianeti.

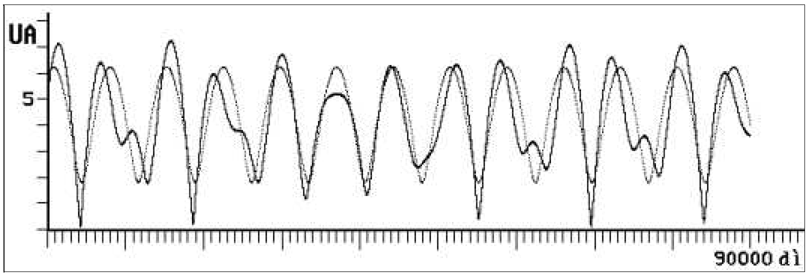

Fig. 6 *- L'Oscillazione della tetrade Giove, Saturno, Urano e Nettuno (linea continua) ha le ascisse dei massimi e dei minimi poco scostate da quelle della coppia Giove e Saturno (linea punteggiata). Dal 1-1-1800 al 31-5-2046.*

I DIAGRAMMI DEI SATELLITI MEDICEI

Il caso migliore di risonanza plurima è offerto dalla triade Io, Europa e Ganimede. Sia il rapporto tra i periodi della prima coppia, Io e Europa, sia quello tra i periodi della seconda coppia, Europa e Ganimede, sono molto vicini a 2:1. Inoltre, i tre corpi insieme sono legati dalla relazione di Laplace. Questa relazione si basa sulla velocità media angolare, detta moto medio, definita come rapporto tra l'angolo giro e il periodo in giorni (n = 360 / T). Indicando con 1, 2, 3 i satelliti, secondo la distanza crescente, e con *n* il moto medio, la relazione risulta:

$$n_1 - 3\, n_2 + 2\, n_3 = 0$$

Il fatto notevole di questa risonanza plurima è la costanza di una differenza calcolata tra le longitudini dei corpi, la quale implica che non può mai esserci una tripla congiunzione dei tre satelliti [2]:

$$L_1 - 3\, L_2 + 2\, L_3 = 180°$$

Questo notevole effetto della risonanza è evidenziato mediante l'oscillazione radiale del centro di massa. Infatti, stabilendo come longitudini iniziali della simulazione una terna di valori correttamente ricavata dalla relazione, otteniamo una oscillazione che, pur essendo complessa, risulta quasi simmetrica tra colmi e conche, secondo il tipo di simmetria a doppio ribaltamento, prima per capovolgimento dall'alto al basso della coppia di colmi, e poi per ribaltamento da sinistra a destra della stessa, che così va a sovrapporsi alla coppia di conche (fig. 7). Inoltre, i colmi e le conche della triade sono determinati dall'oscillazione del centro di massa della coppia dei corpi più massicci, Io e Ganimede, che quindi coordinano al loro periodo sinodico il corpo relativamente minore di Europa. La costanza dell'ampiezza dei colmi e delle conche della triade dipende dal valore corretto delle longitudini iniziali. Infatti, la simulazione con valori di longitudine errati, per esempio che diano la somma di 218° invece di 180°, produce una curva (fig. 8) con i massimi e minimi delle coppie non più uguali. Altre alterazioni compaiono quando si attribuisce la massa uguale ai tre corpi, nel qual caso le conche hanno le loro dimensioni visibilmente ridotte rispetto a quelle dei colmi (fig. 9). Questo significherebbe che la diversità delle masse sia una delle condizioni della maggior stabilizzazione.

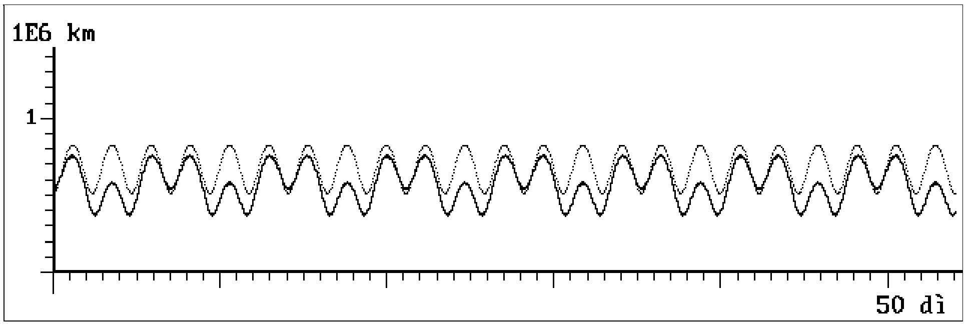

Fig. 7 *- L'oscillazione radiale del centro di massa della triade Io, Europa e Ganimede (linea continua) ha una discreta simmetria tra colmi e conche, inoltre l'oscillazione della coppia dei corpi più massicci Io e Ganimede (linea punteggiata) determina la posizione dei massimi e minimi dell'intera triade. Simulazione con longitudini corrette.*

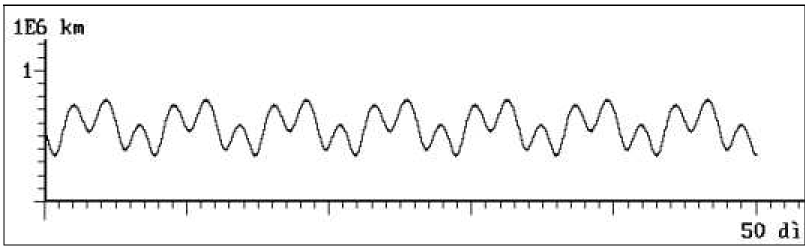

Fig. 8 *- L'oscillazione della triade Io, Europa e Ganimede, simulata con longitudini errate, subisce l'alterazione dei valori dei massimi e dei minimi.*

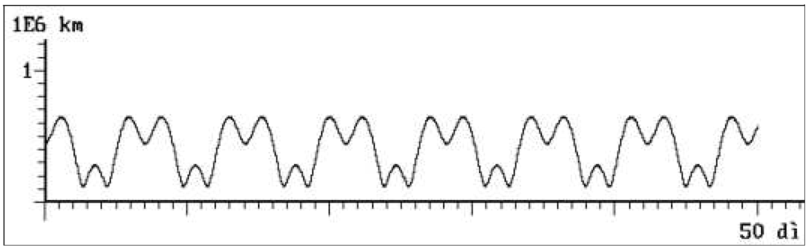

Fig. 9 *- L'oscillazione della triade Io, Europa e Ganimede, simulata con masse uguali dei tre corpi, ha le dimensioni delle conche visibilmente minori rispetto a quelle dei colmi.*

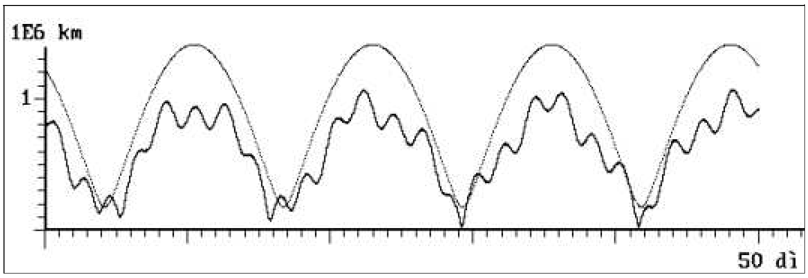

Fig. 10 *- L'oscillazione della tetrade Io, Europa, Ganimede e Callisto (linea continua) è adattata su quella dei due corpi più massicci, Ganimede e Callisto (linea punteggiata).*

Considerando invece la tetrade medicea completa, vediamo che Callisto, il più massiccio della tetrade, introduce nell'oscillazione forme del tutto non simmetriche tra colmi e conche. La stessa dall'oscillazione della coppia Callisto-Ganimede, i due corpi di maggiore grandezza, ha le conche quasi acute, diversamente dai colmi (fig. 10). La mancata partecipazione di Callisto alla risonanza dei primi tre corpi pone il problema di quale fenomeno sia manifestato dalla stabilizzazione della tetrade. La risposta può essere nella quasi circolarità di tutte le loro orbite. Infatti, se quella di Callisto fosse sensibilmente eccentrica le oscillazioni radiali del centro di massa risulterebbero distorte in conseguenza della perdita della uniformità dei saliscendi dell'oscillazione della coppia Callisto-Ganimede.

IL SECONDO PRINCIPIO DI STABILITÀ

La ricerca di un fenomeno semplice conseguente alle interazioni tra i corpi orbitanti non poteva non riguardare la massa che mancava nel primo principio. Il fenomeno che mostra la stabilizzazione delle interazioni tra i corpi è la oscillazione radiale del loro centro di massa. Questo fenomeno non è perfettamente esprimibile con una legge matematica, e del resto mai in natura si trovano sistemi complessi perfettamente ordinati tanto da rispettare esattamente un'equazione matematica. Nemmeno i minerali cristallini sono perfettamente privi di distorsioni che alterino localmente e leggermente l'ordine del reticolo. In natura è preferibile parlare di "ordine tendenziale", tanto meno rigoroso quanto più complesso è il sistema. L'enunciazione del secondo principio di stabilità dei sistemi orbitanti non è quindi fondabile su una equazione, ma sulla comparazione di grafici ottenuti da simulazioni. Ritornando al diagramma del moto del centro di massa della tetrade dei pianeti rocciosi, il confronto è da fare con altri due diagrammi che rappresentino uno la situazione molto instabile e l'altro quella molto stabile. Come situazione instabile ipotizziamo una tetrade di masse tutte uguali. Questa situazione crea una oscillazione a sbalzi repentini, enormemente complessa (fig. 11), che esprimerebbe l'impossibilità del suo perdurare. Come situazione stabile consideriamo un unico corpo orbitante, il quale non subisca perturbazioni di sorta. In questo caso la forma dell'oscillazione dipende dall'eccentricità dell'orbita, in modo che le conche del diagramma si restringono sempre più all'aumentare dell'eccentricità. Con eccentricità un po' inferiore a 0,2 si ottiene una oscillazione che si approssima a una sinusoide (fig. 12), mentre aumentando l'eccentricità l'andamento assume sempre più l'aspetto di un avanzamento saltellante (fig. 13). Sebbene queste ondulazioni non abbiano la semplicità della sinusoide perfetta, non hanno flessi né variazioni di ampiezza. Sono di bassa complessità sebbene non sinusoidali.

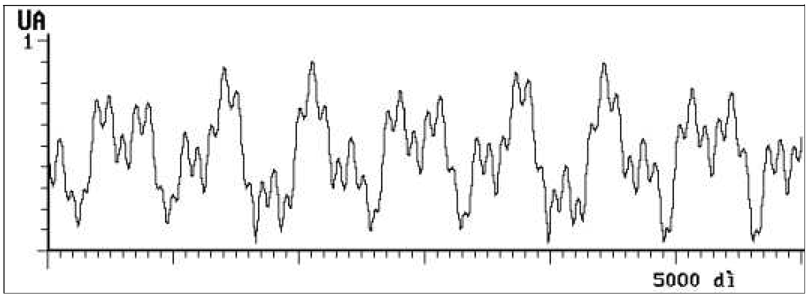

Fig. 11 *- Simulazione falsata dell' oscillazione radiale del centro di massa dei pianeti rocciosi, con le masse uguali per tutti i corpi della tetrade.*

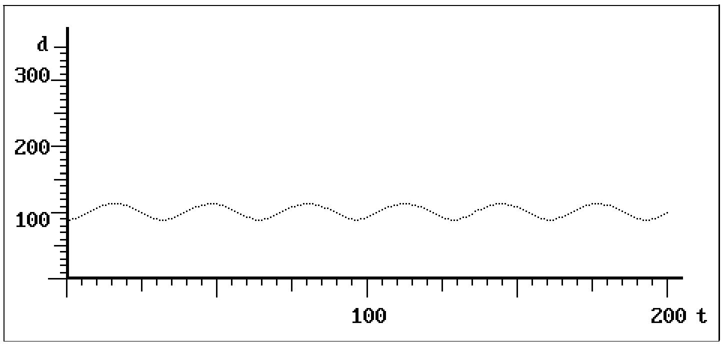

Fig. 12 *- Oscillazione radiale di un unico corpo con orbita di eccentricità 0,119. Colmo all'apogeo e conca al perigeo. In unità di misura arbitrarie di distanza (d) e tempo (t).*

P>

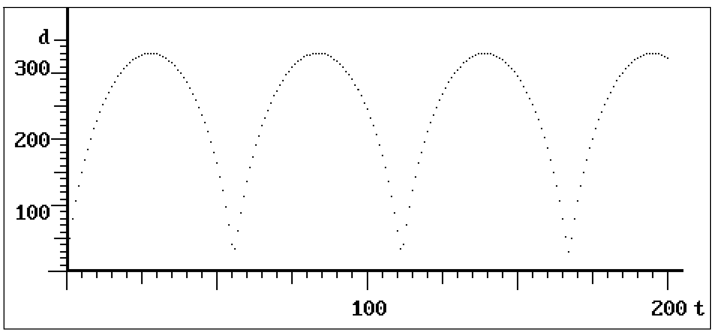

Fig. 13 *- Oscillazione radiale di un unico corpo con orbita di eccentricità 0,832. Cfr fig. 12.*

Ottenuti i diagrammi di paragone della stabilità e della instabilità, possiamo confrontarli con l'oscillazione del centro di massa della tetrade Mercurio, Venere, Terra e Marte, con le masse reali, vista nella figura 3, la quale è una pseudo-sinusoide dipendente principalmente dal periodo sinodico dei due corpi più massicci, la Terra e Venere. Si osserva che l'oscillazione della tetrade reale ha una complessità intermedia tra quella piccola della stabilità e quella grande della instabilità [3].

Da questo confronto si può indurre al secondo principio della stabilità, che esprime la possibilità di coordinamento, cioè di vicinanza, dei corpi orbitanti di masse comparabili [4].

Principio della minima complessità. *Lo stato di maggior stabilità dei gruppi di corpi orbitanti di massa comparabile è riconoscibile dai due effetti della tendenza dell'oscillazione radiale del loro centro di massa a forme pseudo-sinusoidali e della tendenza alla minore alterazione che i corpi minori del gruppo causano rispetto all'oscillazione del centro di massa dei due corpi più massicci. Diversamente, le situazioni di non equilibrio manifestano un aumento della complessità dell'oscillazione.*

I due principi offrono solamente una descrizione fenomenologica dello stato di stabilizzazione dei sistemi orbitanti, mentre non hanno niente da dire sui processi di formazione dei sistemi planetari. Il senso di questi principi risiede nella rivelazione di effetti che comparirebbero qualunque sia la via seguita dai processi caotici di formazione dei sistemi.

È qui disponibile il programma di calcolo TETRADI.EXE, utilizzato per tracciare i diagrammi del presente studio.

Note

[1] Frison, C., *Un diagramma in sostituzione della legge di Titius-Bode*, Bollettino del GAP, n. 19, feb. 2002, Padova.
[2] Murray C. D.; Dermott S. F., *Solar System Dinamics*, Cambridge University Press, 1999, p. 396-397.
[3] Frison, C., *L'oscillazione radiale del centro di massa dei gruppi di corpi orbitanti*, Bollettino del GAP, n. 28, novembre 2004, Padova.
[4] Frison, C., *I due principi di stabilità dei sistemi planetari*, Bollettino del GAP, n. 30, giugno 2005, Padova.