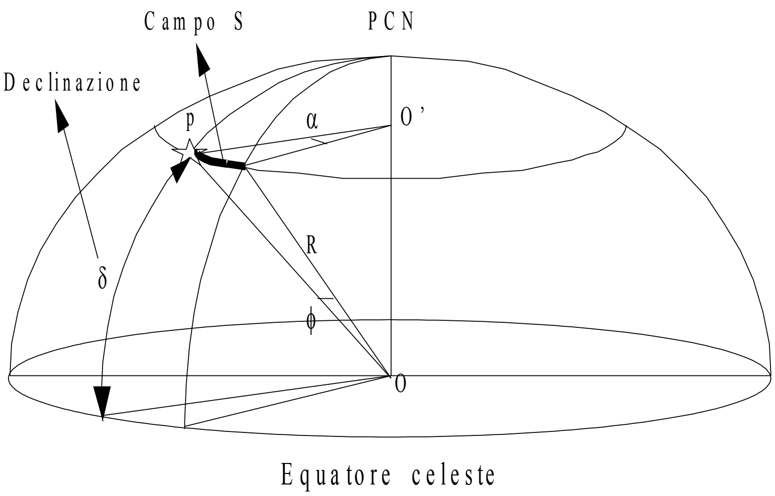
Studio della velocità angolare rispetto l'osservatore di un punto sulla sfera celeste in funzione della declinazione.

1) Teoria

La trattazione degli errori sistematici con SkyPoint, a richiesto un approfondimento sulla velocità angolare degli oggetti a diverse declinazioni. Infatti una volta misurato l'errore Δt ad una data declinazione, il programma continua a tenerne conto anche nei successivi puntamenti a diverse declinazioni. Questo permette di abbattere gli errori sistematici. Verrà di seguito esposto il modello che ho ricavato e le prove sperimentali che confermano la sua validità.

Si consideri la seguente figura :

Fig.1



essa rappresenta la parte nord della sfera celeste (PCN = Polo Celeste Nord).

Una stella P alla declinazione δ compie un angolo α rispetto O' e un angolo ϕ rispetto l'osservatore O. Il nostro scopo è quello di determinare l'andamento di ϕ in funzione del tempo e della declinazione. Si può notare subito (anche dalla Fig.1) che la variazione di ϕ nel tempo ad una declinazione di +90° o –90° è zero, e che coincide con la variazione di α se la declinazione è nulla (cioè sull'equatore celeste). La variazione di ϕ nel tempo si chiama velocità angolare, in questo caso riferita al punto O. R è il raggio fittizio della sfera celeste, esso scomparirà nei calcoli (come dev'essere, ovviamente).

Sia S il campo fissato dal telescopio con un oculare qualunque e sia tale campo piccolo rispetto il raggio O'P, ciò significa che ci manteniamo a qualche grado di distanza dal PCN, punto singolare. Allora valgono le seguenti equazioni (vedi Fig.1):

$$O'P = R \cdot Cos(\delta)$$

Quindi

$$\frac{S}{2} = R \cdot Cos(\delta) \cdot Sin(\frac{\alpha}{2}) \qquad \text{a)}$$

ma d'altro canto si ha anche

$$\frac{S}{2} = R \cdot Sin(\frac{\phi}{2}) \qquad \text{b)}$$

Se sono uguali i primi membri delle due equazioni (a) e b)) lo sono anche i secondi membri, cioè :

$$R \cdot Cos(\delta) \cdot Sin(\frac{\alpha}{2}) = R \cdot Sin(\frac{\phi}{2}) \qquad \text{c)}$$

Semplificando R e sviluppando il seno in serie di McLaurin (punto iniziale $X_0 = 0$) :

$$Sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

Ci si può arrestare al primo ordine, pertanto :

$$Sin(x) \cong x$$

Allora la c) diventa :

$$Cos(\delta) \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\phi}{2}$$

Il trucco, ora, è quello di derivare rispetto il tempo e considerare la declinazione costane, ottenendo :

$$\frac{\partial(\phi)}{\partial t} = \frac{\partial(\alpha)}{\partial t} \cdot Cos(\delta) \qquad \text{d)}$$

dove $\partial\alpha/\partial t$ è la velocità angolare della Terra (vedi Fig.1), che si può considerare costante visto il moto uniforme di essa.

Dalla d) si nota che un punto 'fisso' sulla sfera celeste, possiede una velocità angolare uguale a quella terrestre se δ=0° (qui nasce il metodo suggerito per calcolare sperimentalmente i campi degli oculari, vedi SkyPoint), mentre è nulla se $\delta = +90°$ o $\delta = -90°$ (PCN o PCS).

Essendo il secondo membro della d) costante (una volta fissata la declinazione) lo nomino K :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = K \qquad \text{ovvero} \qquad \partial\phi = \mathrm{K}\partial\mathrm{t}$$

Integro :

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \partial\phi = K \cdot \int_{t_0}^{t} \partial t$$

Si ottiene dunque : $\Delta\phi = K\,\Delta t$ ***e)***

Considero il campo S ad un'altra declinazione δ', sotteso ancora dall'angolo ϕ (è evidente che ϕ non varia al variare della δ , perché è fissato dal telescopio). Riscrivo la e) alla nuova declinazione δ' :

$$\Delta\phi = K'\,\Delta t' \qquad \textit{f)}$$

dove K' vale :

$$K' = \frac{\partial\alpha}{\partial t} \cdot Cos(\delta')$$

come fatto prima, essendo uguali i primi membri delle due equazioni e) ed f) lo sono anche i secondi :

$$\mathbf{K\,\Delta t = K'\,\Delta t'}$$

da cui ricavo Δt ed esplicito le costanti K e K' (la velocità angolare della Terra si semplifica perché compare al numeratore in entrambi i membri); otteniamo la relazione finale :

$$\Delta t = \frac{Cos(\delta')}{Cos(\delta)} \cdot \Delta t' \qquad \text{g)}$$

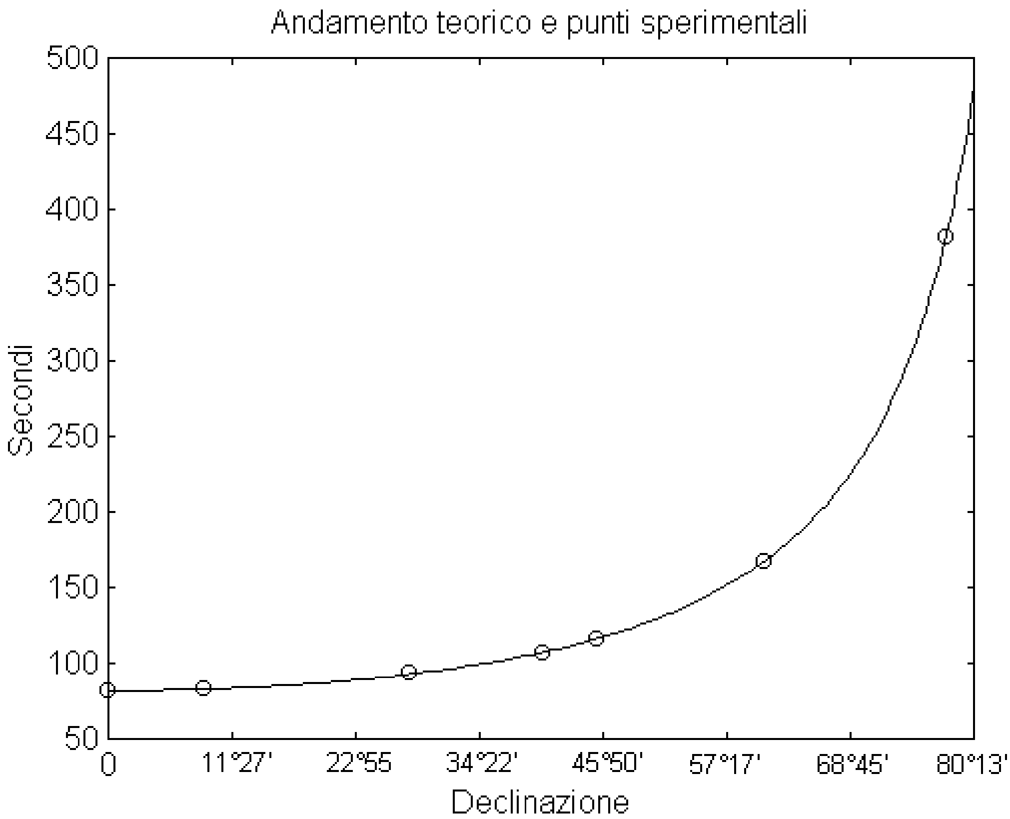
Come ci si aspettava esiste una singolarità nel PCN (e nel PCS); Δt tende all'infinito, in quanto il denominatore tende a zero.
In poche parole se una stella impiega Δt' secondi a percorrere un campo fissato ad una declinazione δ', l'equazione g) da il nuovo Δt ad un'altra declinazione δ (sempre con lo stesso campo).
Analogamente si può ricavare che, nel caso di coordinate orizzontali, il punto singolare coincide con lo zenit e il nadir. Per tale motivo i telescopi dotati di montatura altazimutale (come il telescopio nazionale Galileo, TNG) non possono 'lavorare' allo zenit in quanto il derotatore di campo dovrebbe ruotare a velocità infinita.

2) Sperimentazione :

Di seguito ho 'plottato' in un grafico l'andamento dell'equazione g) specializzata alle prove da me eseguite. In ordinata c'è il tempo, in ascissa la declinazione in gradi (da 0° a 87°).
Per verificare tutto ciò sperimentalmente, ho scelto per la calibrazione la stella Altair di declinazione nota (**δ'**=8°52'7.0'' in gradi decimali **δ'**=8.86861°), il campo l'ho fissato utilizzando un telescopio da 2014mm di focale con l'oculare 16mm Brandon U.S.A.; il **Δt'** corrisponde al tempo di attraversamento lungo il diametro dell'oculare da parte della stella; esso è risultato essere pari a 83 sec. (valor medio). La declinazione **δ'** e il tempo **Δt'** li ho sostituiti nella g), ottenendo :

$$\Delta t = \frac{83.0 \cdot Cos(8.86861)}{Cos(\delta)} = \frac{82.00769}{Cos(\delta)}$$

Sostituendo una declinazione a piacere δ di un'altra stella, si può ricavare il tempo di attraversamento del campo (dello stesso oculare) da parte di essa. A diverse declinazioni corrispondono diversi tempi di attraversamento, in quanto ci sono diverse velocità angolari, come visto sopra. All'equatore celeste si ha la massima velocità, mentre è nulla ai poli.
Come in tutte le discipline scientifiche (quando è possibile), bisogna verificare la previsione teorica (equazione g)) con le osservazioni dirette.
Il confronto è riportato di seguito nel grafico e in tabella 1; la linea continua è l'andamento teorico, mentre i 'pallini' rappresentano le misure (non ho rappresentato le barre di errore in quanto sarebbero invisibili σ = 3 sec.) :



In tabella 1 è possibile confrontare il Δt misurato con quello teorico :

Tabella 1

Declinazione	***Δt Sperimentale***	***Δt Teorico (eq. g))***
0.00000°	81.00 sec.	82.01 sec.
Altair 8.86861°	83.00 sec.	83.00 sec.
Albireo 27.9619°	93.00 sec.	92.85 sec.
γ Cy 40.2565°	107.09 sec.	107.46 sec.
Deneb 45.2797°	116.33 sec.	116.55 sec.
γ Cass 60.7059°	167.67 sec.	167.61 sec
γ Cefeo 77.6225°	381.55 sec.	382.58 sec

Misure eseguite da Vanzella, Bortoluzzi, Santin

Tenendo conto che l'errore associato al Δt sperimentale è dell'ordine dei 3 secondi (posizionamento della stella non perfettamente a fuoco sul bordo del campo iniziale e finale circa 2 sec., e tempo di reazione umano 1sec.). L'andamento sperimentale trovato è ottimo e si accorda perfettamente con i valori teorici (entro un intervallo di declinazione che va da 0° a circa 80°, non ho eseguito misure oltre gli 80° per mancanza di tempo e di 'bel tempo'). Per quantificare la bontà del 'fit' ho eseguito due test statistici : il test χ^2 (chiquadro) e il Kolmogorov-Smirnov. Il livello di confidenza è ottimo, pertanto il modello trovato è applicabile al caso reale con successo.